

Cálculo de Funções Reais de Várias Variáveis

Professor José de Anchieta Delgado

Universidade Federal do Ceará

16/02/2009

1 Introdução

Nos dois primeiros cursos de cálculo diferencial e integral o aluno estudou as funções reais de uma variável. Os problemas que queríamos solucionar eram: reta tangente a uma curva; comportamento do movimento de um objeto; otimização de processos e áreas e volumes. Todos estes problemas desafiaram os cientistas por muitos séculos. Basta recordarmos que, em princípio, estes problemas foram postos pelos gregos. A teoria que possibilitou a solução destes problemas foi consolidada no século dezessete por Newton e Leibnitz.

No nosso curso continuamos tendo em mente os mesmos problemas, com mais autonomia, e vamos estudar os mesmos temas vistos no dois primeiros cursos. No caso, estudaremos derivadas e integrais de funções reais de várias variáveis. Estudaremos os movimentos espaciais e calcularemos as velocidades e as acelerações destes.

O estudo de reta tangente a uma curva no espaço é introduzido como sendo a reta cujo vetor diretor coincide com o vetor velocidade do movimento descrito pela referida curva. Estuda-se também planos tangentes às superfícies. Estes são melhores aproximações das superfícies. Ao estudarmos derivada de uma função de mais de uma variável utilizamos uma aproximação de primeiro grau para conceituá-la. As integrais serão introduzidas através da generalização natural do conceito para funções reais de uma variável.

2 A história

A necessidade de cálculo de áreas e volumes são encontradas na cultura grega, devido a construção de monumentos e canais de irrigação. Estas necessidades levaram os estudiosos da época a proporem métodos para solucionar tais problemas. Uns dos métodos conhecidos, hoje, é o método de exaustão, ou método de Eudoxo-Arquimedes.

Devido a conquista da Grécia pelos romanos, que valorizava a guerra, a cultura grega arrefeceu. Entretanto, a divisão do império romano numa parte oriental de expresso literal e oral grega e numa parte ocidental cuja expressão literal era o latim, a cultura grega perdeu sua vitalidade na Europa.

O cristianismo, apesar de não considerar a cultura grega como inimiga, mas devido os conhecimentos da filosofia de Aristoteles, fazia o possível para não divugá-la. Então com a consolidação da supremacia do cristianismo sobre as demais religiões, no século quinto da nossa era, somente alguns conhecimentos de interesses imediatos foram adaptados aos costumes e cultura virgente.

Diante destes dois golpes a cultura grega, em parte, permaneceu desconhecida no ocidente. Entretanto os arabes que havia incorporado a aritmética indiana, passou com a conquista do Egito, a traduzir as grandes obras dos gregos e incorporar os conhecimentos a sua cultura. Devido a esta atitude houve um interesse generalizado pelos conhecimentos da cultura grega.

Com a conquista da península ibérica pelos arabes houve a incorporação dos conhecimentos gregos na cultura ocidental. Conhecimentos estes acrescentados de rudimentos algébricos. Muitos estudiosos do ocidente, dos séculos doze ao quinze, a luz dos conhecimentos trazidos pelos arabes, construíram uma ciência utilizando-se de ferramentas distintas das utilizadas pelos seus antepassados. Apesar da resistência do cristianismo as novas idéias, devido a filosofia de Aristoteles, o conhecimento grego unido aos rudimentos da álgebra produziram novas descobertas tais como o sistema de coordenadas e estudo de soluções de equações polinômiais.

Um dos problemas do século dezessete eram, dada a fórmula que descreve a distância percorrida por um corpo em função do tempo, encontrar a velocidade e a aceleração em cada instante. Um segundo problema relacionado com este era dada a aceleração encontrar a velocidade e a distância percorrida pelo objeto.

Um outro problema de interesse era determinar a reta tangente a uma curva. Havia duas motivações para este problema. A primeira provinha dos gregos e era puramente geométrica e tinha importância para estudo de ótica. A segunda estava ligada a determinação da direção do movimento de um corpo em cada ponto da sua trajetória.

Havia, ainda, o problema de determinar o máximo e mínimo da distância de um planeta a terra quando este descrevia o seu movimento no espaço. Um problema semelhante era determinar a distância que um projétil alcançava em função do ângulo de inclinação do canhão.

Por último, nesta época o problema de calcular o comprimento de uma curva relacionado com a distância percorrida por um objeto, o cálculo da área

coberta pela trajetória de um planeta num intervalo de tempo, de interesse da astronomia, áreas entre curvas, volumes entre superfícies e centro de equilíbrio de um corpo.

Nesta época muitos matemáticos já haviam se dedicados ao estudo dos problemas acima. Entre eles, Kopernicus, Galileo, Descartes, Fermat, etc. Neste momento, com mais de mil artigos publicados sobre cálculo, havia uma situação cultural favorável o surgimento da teoria, hoje, conhecida como cálculo.

Todos estes problemas, aima mencionados, tiveram suas soluções com a teoria do cálculo consolidada pelo matemáticos Newton, com a devida licença dos físicos, e Leibnitz. Estes dois notáveis cientistas introduziram os conceitos de derivada e integrais e mostraram o teorema fundamental do cálculo. É bom lembrarmos que este teorema já era conhecido por Isaac Barrow, professor de Isaac Newton. Estes rudimentos do cálculo foram essenciais na solução dos problemas propostos acima.

A consolidação da teoria do cálculo é um grande avanço da ciência. Ela está em pé de igualdade com os resultados obtidos por Euclides. A partir desta vitória da ciência muitas portas se abriram e muita matemática foi produzida. Foram necessário dois séculos para que os fundamentos do cálculo podessem ser consolidados.

3 Programa do curso

ATIVIDADES	DATAS
Espaço \mathbb{R}^n: O espaço vetorial \mathbb{R}^n ; produto escalar e perpendicularismo; norma de vetores e propriedades; conjunto aberto e fechado; ponto de acumulação.	16/02/2009 a 20/02/2009.
Funções vetoriais e curvas: Funções vetoriais em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 ; operações com funções vetoriais limites; continuidade; derivada; integral; comprimento de curva.	27/02/2009 a 06/03/2009.
Funções reais de várias variáveis: Funções de duas variáveis reais a valores reais; gráfico e curva de nível; funções de três variáveis reais a valores reais; superfícies de nível.	09/03/2009 a 11/03/2009
Derivadas parciais: Derivadas parciais e funções duas variáveis; de derivadas parciais de funções de três ou mais variáveis.	13/03/2009 a 16/03/2009
Funções diferenciáveis: Função diferenciável; uma condição suficiente para diferenciabilidade; plano tangente; reta normal; diferencial; o vetor gradiente	18/03/2009 a 27/03/2009
Primeira Avaliação	30/03/2009
Regra da cadeia: Regra da cadeia; funções definidas implicitamente teorema da função implícita;	01/04/2009 a 08/04/2009
Gradiente e derivada direcional: Gradiente de uma função de duas variáveis interpretação geométrica do gradiente; gradiente de funções de três ou mais variáveis; derivada direcional; relação entre derivada direcional e gradiente	13/04/2008 a 16/04/2009
Teorema do valor médio e fórmula de Taylor: Teorema do valor médio; funções com gradiente nulo; relação entre funções com o mesmo gradiente; polinômio de Taylor de graus um e dois	20/04/2009 a 24/04/2009
Seminário de apresentação da monografia	27/04/2009 a 29/04/2009
Segunda avaliação	04/05/2009
Máximos e mínimos: Pontos de máximos e pontos de mínimos; condições necessárias para existência de pontos de extremos; máximos e mínimos locais; máximo em conjuntos compactos multiplicadores de Lagrange e máximos e mínimos condicionados	06/05/2009 a 22/05/2009

ATIVIDADES	DATAS
Terceira Avaliação	25/05/2009
Primeira recuperação	29/05/2009
Seminário de avaliação de monografia	01/06/2009 a 05/05/2009
Sistemas de coordenadas no plano: Coordenadas polares definição e exemplos; curvas coordenadas; sistemas de coordenadas gerais no plano definição e exemplos; vetores tangentes e matriz jacobiana; coordenadas elíticas; sistema linear de coordenadas;	08/06/2009 a 08/06/2009
Integrais duplas: Soma de Riemman e o conceito de integral; integrais iteradas; aplicações de integrais duplas; integrais no sistema de coordenadas integrais num sistema geral de coordenadas	10/06/2008 a 12/06/2009
Sistemas de coordenadas no espaço: Coordenadas esféricas - definição e exemplos, curvas e superfícies coordenadas; coordenadas cilíndricas - definição e exemplos, curvas e superfícies coordenadas, sólidos e superfícies de revolução; sistemas de coordenadas geral no espaço - curvas e superfícies coordenadas, vetores tangentes e matriz jacobiana.	15/06/2009 a 15/06/2009
Integrais triplas: Soma de Riemman e o conceito de integral; integrais iteradas; aplicações de integrais triplas; integrais nos sistemas de coordenadas esféricas e cilíndricas; integrais triplas no sistema geral de coordenadas.	17/06/2008 a 19/06/2009
Quarta avaliação	22/06/2009
Segunda recuperação	24/06/200
Exame Final	29/06/2009

4 Bibliografia

Livro texto:

Guidorizzi, Hamilton Luiz Um curso de Cálculo, volume 2, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1997

Craizer, Marcos e Tavares, Goevan Cálculo Integral a Várias Variáveis, Coleção Matmídia, Editora Loyola, So Paulo, 2002

Livros auxiliares:

Bortolossi, Humberto José, Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: uma introdução á teoria de otimização, Editora Loyola, Coleção Matmídia, 2002.

Guidorizzi, Hamilton Luiz Um curso de Cálculo, volume 3, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1997